Matematyczne zmysły: zmysł struktury

1. Zmysł struktury – przykłady z arkuszy maturalnych (2026)

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $x^2 + 10x + 25$ dla $x = \sqrt{2} - 5$ jest równa

A. 2 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $2 - 20\sqrt{2}$ **D.** $62 - 10\sqrt{2}$

Zadanie 10. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$3x^2 + 4x \geq 6x + 8$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0–1)

Trzywyrazowy ciąg $(x,\ x+4,\ 2x+8)$, o wszystkich wyrazach dodatnich, jest geometryczny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz tego ciągu jest równy

A. (-4) **B.** (-1) **C.** 2 **D.** 4

2. Rozwiąż sprytnie każde z równań:

$$x(3 + \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$a\sqrt{2} = 8$$

3. Jakie własności każdej z podanych poniżej liczb możesz rozpoznać na podstawie jej zapisu w danej postaci? (transparentność reprezentacji ze względu na pewne własności; uwaga: $a = b = c = d = e$)

$$a = 216^2$$

$$b = 36^3$$

$$c = 3 \cdot 15552$$

$$d = 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43 + 1$$

$$e = 12 \cdot 3000 + 12 \cdot 888$$

4. Jakie własności każdej z podanych poniżej funkcji możesz rozpoznać na podstawie postaci, w jakiej zapisano wzór funkcji? (transparentność reprezentacji ze względu na pewne własności; uwaga: to wzory tej samej funkcji)

$$f_1(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

$$f_2(x) = -2(x+1)^2 + 8$$

$$f_3(x) = -2(x-1)(x+3)$$

$$f_4(x) = 2(x+3)(1-x)$$

$$f_5(x) = -2x(x+2) + 6$$

5. Transparentność reprezentacji algebraicznej funkcji ze względu na możliwe przekształcenia wykresu funkcji

a) Jak, mając dany wykres funkcji f, narysował(a)byś wykres funkcji f_1, a jak wykres funkcji f_2?

$$f(x) = 2^x$$

$$f_1(x) = 8 \cdot 2^x \qquad f_2(x) = 2^{x+3}$$

b) Jak, mając dany wykres funkcji g, narysował(a)byś wykres funkcji g_1, a jak wykres funkcji g_2?

$$g(x) = \log_2 x$$

$$g_1(x) = \log_2(8x) \qquad g_2(x) = 3 + \log_2 x$$

6. Diagnozowanie zmysłu struktury – wyrażenia algebraiczne

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305–312). Prague, CZ: PME.

Zadanie 1. Rozłóż na czynniki: $36 - y^2$, korzystając ze wzoru

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Zadanie 2. Rozłóż na czynniki:

$$81 - x^2$$

Zadanie 3. Rozłóż na czynniki:

$$x^4 - y^4$$

Zadanie 4. Rozłóż na czynniki:

$$(x - 3)^4 - (x + 3)^4$$

Zadanie 5. Oblicz bez użycia kalkulatora:

$$1001^2 - 999^2$$

Zadanie 6. Rozłóż na czynniki:

$$24x^6y^4 - 150z^8$$

Zadanie 7. Udowodnij, że

$$(x + y)^4 = (x - y)^4 + 8xy(x^2 + y^2)$$

7. Diagnozowanie zmysłu struktury – równania

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effects of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference, 3*, 49–56.

W zależności od celu, jaki sobie stawiamy, dajemy polecenie „Rozwiąż równania" bez dodatkowego komentarza (diagnoza), albo polecenie rozbudowane, kierujące uwagę ucznia na strukturę równania (świadome uczenie się) „Rozstrzygnij, które równania mają rozwiązania, a które są sprzeczne. W każdym przykładzie uzasadnij odpowiedź, wykorzystując strukturę równania, bez wykonywania zbędnych przekształceń."

$1-\frac{1}{n+3}-1+\frac{1}{n+3}=\frac{1}{72}$	$\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=7+\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$
$1-\frac{1}{n+2}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{110}$	$\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$
$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{132}$	$\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)-x=6+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$

W zależności od celu: „Rozwiąż równania" albo „Rozwiąż pierwsze równanie. Czy jego rozwiązanie może pomóc Ci rozwiązać drugie równanie? Uzasadnij odpowiedź."

$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2x+3=\frac{21}{4}$
$\left(2\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-2\sin x+3=\frac{21}{4}$

8. Rozwijanie zmysłu struktury – proste równania i nierówności z wartością bezwzględną, proste równania wielomianowe

Co wspólnego ze sobą mają te przykłady?

$\|x+7\| = -7$
$\big\|\|x+4\| - 7\big\| = -3$
$\|x+1\| + \|x-1\| = -2$
$\|x+10\| + \|x-8\| = 0$
$\|x+6\| < -6$

Co wspólnego ze sobą mają te nierówności?

$\|x-5\| > -5$
$\|x-2024\| \geq 0$

Pod jakim względem są podobne, a czym się różnią te nierówności?

$\|x+8\| \leq 0$
$\|x-2024\| > 0$

Pod jakim względem są podobne, a czym się różnią te równania?

$x^2 - 64 = 0$	$x^2 + 64 = 0$	$x^3 - 64 = 0$	$x^3 + 64 = 0$

9. Trzy spojrzenia na tę samą nierówność

$$\mathbf{|2x-4| < 8}$$

$2 \cdot \|\boldsymbol{x} - 2\| < 8 \quad \| : 2$ $\|\boldsymbol{x} - 2\| < 4$	$\|\boldsymbol{2x} - 4\| < 8$	$\|\boldsymbol{2x-4}\| < 8$
Co to za liczba (x), której odległość od 2 na osi liczbowej jest mniejsza niż 4?	Co to za liczba $(2x)$, której odległość od 4 na osi liczbowej jest mniejsza niż 8?	Co to za liczba $(2x-4)$, której odległość od 0 na osi liczbowej jest mniejsza niż 8?

10. Jeden przykład bazowy – wiele zadań

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

$\|x+8\|=10$ $\|x+8\|<10$ $\|x+8\|\leq 10$ $\|x+8\|>10$ $\|x+8\|\geq 10$	$\|x+8\|=-10$ $\|x+8\|\geq -10$ $\|x+8\|<-10$	$\|x+8\|=0$ $\|x+8\|<0$ $\|x+8\|\leq 0$ $\|x+8\|\geq 0$ $\|x+8\|>0$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

(ważnym elementem rozwiązania zadań jest wykonanie na początku poglądowego szkicu paraboli, która jest wykresem danej funkcji kwadratowej; szkic ma pozwolić odczytać, kiedy funkcja przyjmuje wartości ujemne, dodatnie, a kiedy wartość zero)

	$\boldsymbol{f(x)=x^2+16}$	$\boldsymbol{f(x)=x^2-25}$
$f(x)=0$		
$f(x)<0$		
$f(x)\leq 0$		
$f(x)>0$		
$f(x)\geq 0$		
	$\boldsymbol{f(x)=x^2-8x+16}$	$\boldsymbol{f(x)=x^2-4x}$
$f(x)=0$		
$f(x)<0$		
$f(x)\leq 0$		
$f(x)>0$		
$f(x)\geq 0$		

	$\boldsymbol{f(x) = (x+2)(x-3)}$	$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(5-x)}$
$f(x) = 0$		
$f(x) < 0$		
$f(x) \leq 0$		
$f(x) > 0$		
$f(x) \geq 0$		
	$\boldsymbol{f(x) = -(x-4)^2 - 5}$	$\boldsymbol{f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}$
$f(x) = 0$		
$f(x) < 0$		
$f(x) \leq 0$		
$f(x) > 0$		
$f(x) \geq 0$		
	$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x + 5}$	$\boldsymbol{f(x) = -4x^2 + 2x - 3}$
$f(x) = 0$		
$f(x) < 0$		
$f(x) \leq 0$		
$f(x) > 0$		
$f(x) \geq 0$		

Zadanie 1. Wyznacz (tam, gdzie to możliwe) **największą wartość** i **najmniejszą wartość**, jaką funkcja f przyjmuje w podanym przedziale lub sumie przedziałów. Zapisz wszystkie swoje obliczenia.

a) $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$, dla $x \in [-3,0]$

b) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$, dla $x \in [1,2]$

c) $f(x) = 3(x + 4)(x - 2)$, dla $x \in [3,4]$

d) $f(x) = -(x + 1)(3 - x)$, dla $x \in [1,3]$

e) $f(x) = -2(x - 3)^2 + 1$, dla $x \in [1,5]$

f) $f(x) = (x + 1)^2 - 4$, dla $x \in (-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$

g) $f(x) = -x^2 + 1$, dla $x \in (-2,1)$

Zadanie 2. Funkcja $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ przyjmuje największą wartość w przedziale $[m, m + 6]$ dla $x = m + 2$. Jaką liczbą jest m?

Zamiast stosować znany algorytm możemy postąpić inaczej:

- **Czy parabola, która jest wykresem danej funkcji ma ramiona skierowane w górę, czy w dół?** (Rozpoznajemy na podstawie postaci wzoru funkcji; uwaga na podpunkt d – postać iloczynu, ale nie (znana uczniom) postać iloczynowa)
- **Wyznaczmy x_w.**
- **Jak podany przedział jest położony względem x_w?**

Zaznaczamy odpowiedni fragment paraboli. Następnie, na podstawie monotoniczności funkcji w danym przedziale lub osiowosymetryczności paraboli, ustalamy y_{max} oraz y_{min}. Nie obliczamy automatycznie wartości funkcji na końcach przedziału i wartości dla x_w. Obliczamy tylko to, co jest nam rzeczywiście potrzebne, analizując każdy z przykładów osobno.

Opracowanie: B. Barańska, IM UKEN